4 - Variáveis aleatórias multidimensionais

Conceitos em $\mathbb{R}$, revisão:

Definição 3.1 – Variável aleatória

Uma variável aleatória, X, *é uma função com domínio* Ω *e com contradomínio em* $\mathbb{R}$.

$$X: \omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in \mathbb{R}$$

Definição 3.2 – Função de distribuição

A função real de variável real, F, *com domínio* $\mathbb{R}$, *definida por,*

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

designa-se por função de distribuição da variável aleatória X.

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- **Propriedades da função de distribuição:**

1) $\mathbf{0 \leq F(x) \leq 1}$.

2) ***F é não decrescente***: $\Delta x > 0 \Rightarrow F(x) \leq F(x + \Delta x)$.

3)$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *e* $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

4) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, quaisquer que sejam a *e* b *a verificar* $b > a$

5) ***F é contínua à direita***, $F(a + 0) = \lim_{x \to a+0} F(x) = F(a)$

6)$P(X = a) = F(a) - F(a - 0)$, qualquer que seja a *um número real finito.*

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

4.1 – Variáveis aleatórias bidimensionais. Conceitos introdutórios

- **Variável aleatória *k-dimensional***

Quando o estudo envolve k *atributos quantitativos dos elementos* $\omega \in \Omega$, estabelece-se a correspondência,

$$\omega \in \Omega \rightarrow \Big(\underbrace{X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_k(\omega)}_{\text{variável aleatória } k-\textit{dimensional}} \Big) \in \mathbb{R}^k$$

Fazendo $k = 2$

Definição 4.1 – Variável aleatória bidimensional
Uma variável aleatória bidimensional, (X, Y) *é uma função com domínio* Ω *e com* contradomínio em $\mathbb{R}^2$.

$$\omega \in \Omega \rightarrow \big(X(\omega), Y(\omega)\big) \in \mathbb{R}^2$$

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Definição 4.2 – Função de distribuição conjunta

Seja (X, Y) *uma variável aleatória bidimensional.*

A função real de duas variáveis reais, com domínio $\mathbb{R}^2$, definida por: $F_{X,Y}(x, y) = P_{X,Y}(X \leq x, Y \leq y)$

é a função de distribuição de (X, Y) *ou a função de distribuição conjunta das variáveis* X *e* Y.

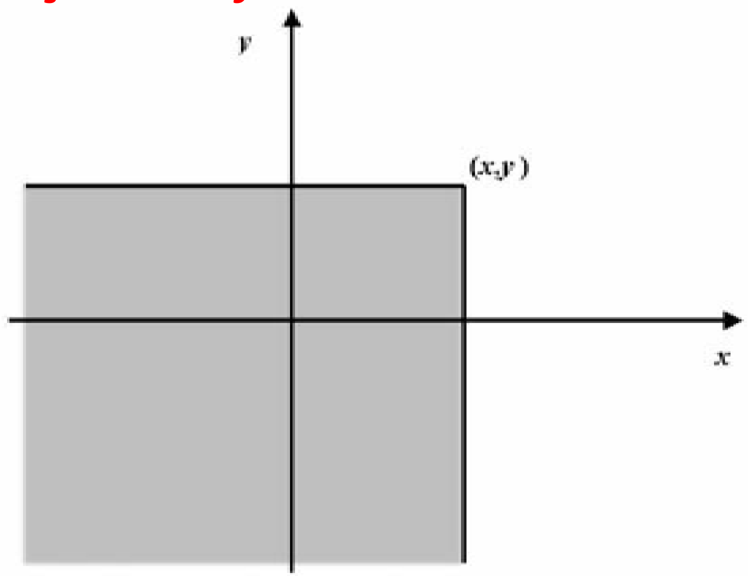


Fig. 3.16 – Região do plano $\mathbb{R}^2$ definido pelas desigualdades $X \leq x$ e $Y \leq y$.

- **Propriedades da função de distribuição:**

1) $0 \leq F(x, y) \leq 1.$

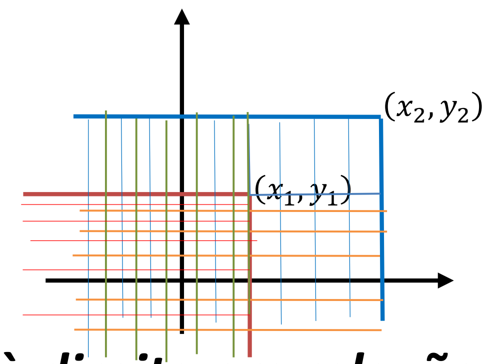
2) ***F é não decrescente*** separadamente, em relação a *x e em relação a y :*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \geq 0 \ \forall (x, y) \in Dom; \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \geq 0 \geq 0 \ \forall (x, y) \in Dom.$$

3) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0 \text{ e } F(+\infty, +\infty) = 1$

4) Considere-se o rectângulo *I de* $\mathbb{R}^2$ *(fig 3.17) com vértices nos pontos,* $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2)$

$I = \{(x, y): x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2\}$



$$P(I) = P(x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2)$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

5) Qualquer função de distribuição F *é* ***contínua à direita em relação a x e em relação a y****,*

$$F(x + 0, y) = F(x, y); F(x, y + 0) = F(x, y)$$

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- **Funções de distribuição marginais - cada variável considerada de forma isolada**

$$P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty) = F_X(x)$$

$$P(Y \leq y) = P(X \leq +\infty, Y \leq y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = F(+\infty, y) = F_Y(y)$$

Definição 4.3 – Função de distribuição marginal

A função $F_X(x) = F_{X,Y}(x, +\infty)$ - *função de distribuição marginal da variável* aleatória X.

A função $F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty, y)$ - *função de distribuição* marginal da variável aleatória Y.

A distribuição conjunta determina univocamente as distribuições marginais, mas a <u>inversa não é verdadeira</u>.

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Seja a v.a. bidimensional (X, Y) com f.d. :

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0, y < 0 \\ 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y} & x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

A **função distribuição marginal de $\boldsymbol{X}$** é

$$F_{(X)}(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

A **função distribuição marginal de $\boldsymbol{Y}$** é

$$F_{(Y)}(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y} & y \geq 0 \end{cases}$$

Variáveis independentes

Definição 4.4 – Variáveis aleatórias independentes
Considere-se uma variável aleatória bidimensional (X, Y). *Sejam* B_1 *e* B_2 *dois acontecimentos* quaisquer tais que B_1 *só envolve* X *e* B_2 *apenas se refere a* Y. *As variáveis* aleatórias X *e* Y *são independentes se e só se,*

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1) \times P(Y \in B_2)$$

De forma equivalente: $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y)$

Teorema 4.1 – Se X *e* Y *são variáveis aleatórias independentes e* *se* $\boldsymbol{\psi}$ *e* $\boldsymbol{\varphi}$ *são duas* funções então as variáveis aleatórias $U = \boldsymbol{\psi}(X)$, $V = \boldsymbol{\varphi}(Y)$ *são também independentes*.

Dem.: *Murteira (1990a).*

4.3 - Variáveis bidimensionais discreta

Ex.1- Suponha que um vendedor de automóveis pretende vender três tipos de automóveis: um AUDI descapotável, um Mini Austin e um familiar Volvo. Para saber como orientar a sua campanha promocional, interessa-lhe saber a distribuição de probabilidades por idades e género.

Ex.2 – Suponha que é um gestor de carteira e tem de optar por um de dois pacotes de acções A e B. Para cada um dos pacotes a percentagem de rendimentos possíveis são 0%, 5% e 10%. Para fundamentar a escolha o gestor necessita de ter uma ideia das probabilidades associadas a cada grupo (pacote de acções –A, B- percentagem de rendimento- 0%, 5% e 10%).

4.3 - Variáveis bidimensionais discretas

Definição 4.5 – Variável aleatória bidimensional discreta $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$
é variável aleatória bidimensional discreta se e só se X e Y são variáveis aleatórias discretas.

$$D_{(X,Y)} = \{(x, y): P(X = x, Y = y) > 0\}$$

$$\sum_{(x,y)\in D_{(X,Y)}} P(X = x, Y = y) = 1$$

Definição 4.6 – Função probabilidade conjunta
Seja (X, Y) *uma variável aleatória bidimensional discreta. A função real de duas variáveis* reais, com domínio $\mathbb{R}^2$, definida por,
$f_{(X,Y)}(x, y) = P(X = x, Y = y)$ é a função probabilidade de (X, Y) *ou a função probabilidade conjunta das variáveis* X e Y.

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- Propriedades da função probabilidade conjunta:

1. $P\big((X,Y) \in B\big) = \sum_{(x,y)\in B} P(X = x, Y = y) = \sum_{(x,y)\in B} f(x,y)$

2. $F(X,Y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} f(x_i, y_i)$

Definição 4.7 - Função probabilidade marginal da v.a $\boldsymbol{X}$

Considere-se uma variável aleatória bidimensional (X,Y). *Seja* $F_X(x)$ *a função de distribuição* marginal de X *e*

$$D_X = \{x: P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-0) > 0\},$$

o conjunto dos pontos de descontinuidade de $F_X(x)$ *com probabilidade positiva.*

A função probabilidade marginal de X *é definida por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = x) & x \in D_X \\ 0 & x \notin D_X \end{cases} \qquad (4.11)$$

De igual modo se define a **Função probabilidade marginal da v.a. Y:**

$$f_Y(y) = \begin{cases} P(Y = y) & y \in D_Y \\ 0 & y \notin D_Y \end{cases} \qquad (4.12)$$

Com : $D_Y = \{y: P(Y = y) = F_Y(y) - F_Y(y-0) > 0\}$

$$f_X(x) = P(X = x) = P\left(X = x, Y = y_j\right) \qquad (j = 1, 2, \cdots)$$

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P\left(X = x_j, Y = y\right) \qquad (j = 1, 2, \cdots)$$

Teorema 4.2 - As variáveis aleatórias *X e Y são independentes se e só se,* $\boldsymbol{f(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y) \quad \forall\, (x,y) \in D_{(X,Y)}}$, isto é, se e só se a função probabilidade conjunta é igual ao produto das funções probabilidade marginais. (**para todos os pontos de descontinuidade de $\boldsymbol{F(x,y)}$**)

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Ex1. X – idade; Y - tipo de automóvel

$X = 1$ - $\text{I} \leq 25$; $X = 2$ - $25 < \text{I} \leq 50$; $X = 3 - \text{I} > 50$

$Y = 1$ - Audi; $Y = 2$ - Mini; $Y = 3 -$ Volvo

$X \quad \backslash \quad Y$	**1**	**2**	**3**	$f_X(x)$
1	0.05	0.21	0.04	0.3
2	0.10	0.10	0.10	0.3
3	0.05	0.05	0.30	0.4
$f_Y(y)$	0.2	0.36	0.44	1

Probabilidade de se venderem a pessoas com 50 anos ou menos, automóveis das marcas Audi e Mini?

$$P(X \leq 2, Y \leq 2) = F_{X,Y}(2,2) = \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{2} \boldsymbol{f_{X,Y}(x, y)}$$

$$= \boldsymbol{f_{X,Y}(1,1) + f_{X,Y}(1,2) + f_{X,Y}(2,1) + f_{X,Y}(2,2)}$$

$$= 0.05 + 0.21 + 0.1 + 0.1 \; = \; 0.46$$

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Ex1. X – idade; Y - tipo de automóvel

$X = 1$ - $\mathrm{I} \leq 25$; $X = 2$ - $25 < \mathrm{I} \leq 50$; $X = 3 - \mathrm{I} > 50$

$Y = 1$ - Audi; $Y = 2$ - Mini; $Y = 3 -$ Volvo

$X \quad \backslash \quad Y$	1	2	3	$f_X(x)$
1	0.05	0.21	0.04	0,3
2	0.10	0.10	0.10	0,3
3	0.05	0.05	0.30	0,4
$f_Y(y)$	0.2	0.36	0,44	1

Qual a probabilidade de os potenciais clientes do vendedor terem mais de 25 anos?

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_X(1) = 1 - \boldsymbol{f_X(1)} = 1 - 0.3 = 0.7$$

Qual a probabilidade de os potenciais clientes do vendedor quererem Mini ou Volvo?

$$P(Y > 1) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - F_Y(1) = 1 - \boldsymbol{f_Y(1)} = 1 - 0.2 = 0.8$$

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Ex1. X – idade; Y - tipo de automóvel

$X = 1$ - I ≤ 25; $X = 2$ - $25 <$ I ≤ 50; $X = 3 -$ I > 50

$Y = 1$ - Audi; $Y = 2$ - Mini; $Y = 3 -$ Volvo

$\boldsymbol{X \quad \backslash \quad Y}$	**1**	**2**	**3**	$\boldsymbol{f_X(x)}$
1	0.05	0.21	0.04	0,3
2	0.10	0.10	0.10	0,3
3	0.05	0.05	0.30	0,4
$\boldsymbol{f_Y(y)}$	0.2	0.36	0,44	1

Será o tipo de automóvel escolhido independente da idade?

$$f_{X,Y}(2,1) = 0.1 \neq f_X(2) * f_Y(1) = 0.3 * 0.2 = 0.06$$

Então o tipo de carro e a idade não *são v.a.(s) independentes*

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Ex.2 – X- rendimento do pacote A; Y- rendimento do pacote B

$X = 1$ - 0%; $X = 2$ - 5%; $X = 3 -$ 10%; $X = 4 -$ 15%

$Y = 1$ – 0%; $Y = 2$ – 5%; $Y = 3 -$ 10%; $Y = 4 -$ 15%

$X \quad \backslash \quad Y$	**1**	**2**	**3**	**4**	$\boldsymbol{f_X(x)}$
1	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,25
2	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,25
3	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,25
4	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,25
$\boldsymbol{f_Y(y)}$	0,25	0,25	0,25	0,25	1

O rendimento do pacote A é independente do rendimento do pacote B?

$$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \ \textit{são independentes sse } \boldsymbol{f_{X,Y}(x,y)} = \boldsymbol{f_X(x)} * \boldsymbol{f_Y(y)} \ \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{D_{X,Y}}$$

$$\boldsymbol{f_{X,Y}(1,1)} = 0.0625 = 0.25 * 0.25 = \boldsymbol{f_X(1)} * \boldsymbol{f_Y(1)}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{f_{X,Y}(4,4)} = 0.0625 = 0.25 * 0.25 = \boldsymbol{f_X(4)} * \boldsymbol{f_Y(4)}$$

- **Exemplo 4.4 -** Lançamento de dois dados. Sejam X*: número de pontos obtido com o* primeiro dado e Y*: o número máximo de pontos obtido no conjunto dos dois dados.*

  Por exemplo: se sair $(1,3)$ tem-se $X = 1, Y = 3$*; se sair* $(3,3)$ *tem-se* $X = 3, Y = 3$.

X \ Y	1	2	3	4	5	6	$f_X(x)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$
$f_Y(y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

- **Definição 3.13 - Função probabilidade condicionada**

Seja $f(x, y)$ *a função probabilidade conjunta de* X *e* Y

A função probabilidade de X condicionada pela realização do acontecimento $\{Y = y_j\}$, *com* $P(Y = y_j) > 0$ *é dada* por,

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad (\boldsymbol{y\ fixo}) \quad (4.16)$$

A função probabilidade de Y condicionada pela realização do acontecimento $\{X = x_j\}$, *com* $P(X = x_j) > 0$ *é dada* por,

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \quad (\boldsymbol{x\ fixo}) \quad (4.17)$$

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Cálculo de probabilidades condicionadas:

$$P(X = 2|Y = 3) = \frac{P(X = 2, Y = 3)}{P_Y(Y = 3)} = \frac{f(2,3)}{f_Y(3)} = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5}$$

$$P(Y = 5|X = 3) = \frac{P(X = 3, Y = 5)}{P_X(X = 3)} = \frac{f(3,5)}{f_X(3)} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}$$

$$P(1 < X \leq 3|Y = 2) = \frac{f(2,2) + f(3,2)}{f_Y(2)} = \frac{2/36 + 0}{3/36} = \frac{2}{3}$$

$$P(2 \leq Y \leq 4|X = 1) = \frac{f(1,2) + f(1,3) + f(1,4)}{f_X(1)} = \frac{3/36}{6/36} = \frac{1}{2}$$

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- As funções probabilidade condicionadas gozam de todas as propriedades das funções probabilidade:

$$\sum_{x \in D_X} f_{X|Y=y}(x) = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{y \in D_Y} f_{Y|X=x}(y) = 1 \quad (4.18)$$

Independência de variáveis aleatórias e funções probabilidade condicionadas.

$$f_{X|Y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x) \times f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x) \quad \text{se} \quad f_Y(y) > 0$$

$$f_{Y|X}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_X(x) \times f_Y(y)}{f_X(x)} = f_Y(y) \quad \text{se} \quad f_X(x) > 0$$

Exemplo 3.17 – Retome-se o exemplo 4.4

- funções probabilidade condicionadas, assumindo $Y = 3$

$$f_{X|Y=3}(1) = \frac{f_{X,Y}(1,3)}{f_Y(3)} = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5}, \quad f_{X|Y=3}(2) = \frac{f_{X,Y}(2,3)}{f_Y(3)} = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5}$$

$$f_{X|Y=3}(3) = \frac{f_{X,Y}(3,3)}{f_Y(3)} = \frac{3/36}{5/36} = \frac{3}{5}, \textit{ então:}$$

$$\sum_{x \in D_X} f_{X|Y=3}(x) = f_{X|Y=3}(1) + f_{X|Y=3}(2) + f_{X|Y=3}(3) = 1$$

- funções probabilidade condicionadas, assumindo $X = 4$

$$f_{Y|X=4}(4) = \frac{f(4,4)}{f_X(4)} = \frac{4/36}{6/36} = \frac{2}{3}, \qquad f_{Y|X=4}(5) = \frac{f(4,5)}{f_X(4)} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}$$

$$f_{Y|X=4}(6) = \frac{f(4,6)}{f_X(4)} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6} \textit{ então:}$$

$$\sum_{y \in D_Y} f_{Y|X=4}(y) = \sum_{y=4}^{6} f_{Y|X=4}(y) = 1$$

4.4 Variáveis bidimensionais contínuas

Ex1: Uma empresa produz computadores fixos e portáteis. Esta empresa pretende ter uma ideia da sua performance em termos de prazos de satisfação das encomendas de cada um daqueles tipos de computadores. Existe informação sobre a proporção mensal de encomendas satisfeitas no prazo de uma semana. Como estatístico ao serviço da empresa como procederia para responder à pretensão da empresa?

Ex2: Uma empresa de recrutamento de trabalho temporário aplica 2 testes que avaliam as competências em matemática e destreza manual aos trabalhadores que a ela recorrem para arranjar emprego.
A empresa recebe um pedido de procura de um trabalhador para um cargo específico, para o qual se exige certo nível de competências para cada uma das áreas avaliadas.
Como técnico dessa empresa é-lhe pedido um parecer sobre a probabilidade de encontrar um trabalhador com o perfil desejado. Como procederia para fundamentar o seu parecer?

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Exemplo: Um país importa aço e exporta automóveis. O valor por unidade de carro exportado é medido em milhares u.m./p.carro e representado pela v.a. X. O valor por unidade de aço importado é medido em milhares u.m. e representado pela v.a. Y.

Suponha que como economista lhe pedem para calcular, prever o valor da balança comercial relativo a estes produtos, ié, o desvio entre o montante total das exportações de automóveis e o das importações do aço.

Para tal vai precisar de conhecer a distribuição de probabilidades da v.a. Bidimensional (X, Y) que é continua.

4.4 Variáveis bidimensionais contínuas

Definição 4.9 – Variável aleatória bidimensional contínua

A variável aleatória $(X\ ,Y)$, *com função de distribuição* $F(x,y)$, *é uma variável aleatória* bidimensional contínua se e só se, existe uma função real de duas variáveis reais, não negativa, $f(x,y)$, *tal que,*

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv\ \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.19)$$

$(X\ ,Y)$ *é uma variável aleatória bidimensional contínua se e só se,* X *e* Y *são variáveis* aleatórias contínuas.

Definição 4.10 – Função densidade conjunta

A função $f(x,y)$ *introduzida na definição anterior, chama-se função densidade (probabilidade) conjunta* de $(X\ ,Y)$ *ou de* X *e* Y.

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

- Da propriedade 3 da função de distribuição conjunta, vem:
- $F(+\infty,+\infty) \; = 1 \Leftrightarrow F_{X,Y}(+\infty,+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$
- Se $f\ (x,y)$ *for contínua no ponto* (x,y) *então,* $f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$
- Nos pontos em que não existe segunda derivada, convenciona-se que $f\ (x,y) \; = \; 0$.

- As funções de distribuição marginais de X *e de* Y*, escrevem-se:*

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,y)dydu$$

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,v)dxdv$$

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEL ALEATÓRIA e FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Definição 4.11 – Funções densidade marginais

- A função densidade marginal de X é dada por:

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \qquad (4.22)$$

- A função densidade marginal de Y é dada por:

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx \qquad (4.23)$$

Teorema 4.3 – As variáveis $\boldsymbol{X}$ *e* $\boldsymbol{Y}$ *dizem-se independentes se e só se,* $\boldsymbol{f_{X,Y}(x,y)} = f_X(x) \times f_Y(y)$

função densidade conjunta

função densidade marginal $\boldsymbol{X}$

função densidade marginal $\boldsymbol{Y}$

Dem.: livro

Definição 4.12 – Funções densidade condicionadas

Seja $f_{X,Y}(x,y)$ *a função densidade conjunta de* X *e* Y.

- *A função densidade de* X *condicionada* por $Y = y$, *com* $f_Y(y) > 0$, *é definida da seguinte maneira:*

$$f_{X|Y=y} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad (\boldsymbol{y\ fixo}) \quad (4.25)$$

- *A função densidade de* Y *condicionada* por $X = x$, *com* $f_X(x) > 0$, *é definida da seguinte maneira:*

$$f_{Y|X=x} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \qquad (\boldsymbol{x\ fixo}) \quad (4.26)$$

- A função densidade condicionada verifica todas as propriedades de uma função densidade de uma variável aleatória unidimensional.

- $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_{Y|X}(y) = f_Y(y) \times f_{X|Y}(x)$

4.4 Variáveis bidimensionais contínuas

Ex1: A proporção mensal de encomendas satisfeitas no prazo de uma semana, para cada um daqueles tipos de computadores podem ser representadas, respectivamente, pelas v.a.(s) X e Y com função densidade probabilidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = 2 - x - y \quad (0 < x < 1, 0 < y < 1)$$

a) Num dado mês qual a probabilidade de a empresa satisfazer , menos de 75% das encomendas de computadores fixos numa semana em que foram satisfeitas 50% das encomendas de portáteis?

b) Estude a independência entre as variáveis X e Y.

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

4.4 Variáveis bidimensionais contínuas

Ex.2: Da análise da informação sobre as notas de centenas de candidatos nos testes de avaliação de competências em matemática e destreza manual, a empresa concluiu que aquelas notas são bem representadas, respectivamente, pelas v.a.(s) X e Y com função densidade de probabilidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = 0.4(2x+3y) \qquad (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1)$$

a) Existe uma vaga para gerente de escritório para o preenchimento da qual é exigida uma nota superior a 0.75 em matemática e 0.25 em destreza manual. Qual a probabilidade de que um candidato que acabou de se inscrever na empresa tenha o perfil desejado?

b) Abriu uma vaga para fiel de armazém. Para se qualificar para essa vaga o candidato tem de ter uma nota superior a 0.8 em destreza manual. Qual a probabilidade de que um candidato que acabou de se inscrever na empresa satisfaça a exigência?

4.4 Variáveis bidimensionais contínuas

Ex.2: Da análise da informação sobre as notas de centenas de candidatos nos testes de avaliação de competências em matemática e destreza manual, a empresa concluiu que aquelas notas são bem representadas, respectivamente, pelas v.a.(s) X e Y com função densidade de probabilidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = 0.4(2x + 3y) \qquad (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1)$$

c) Determine a função densidade da nota em matemática, condicionada pela informação de que o candidato teve uma nota de 0.5 em destreza manual?

d) As notas em matemática e destreza manual são independentes?

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

$Ex.14\text{:}\, f_{X,Y}(x,y) = 2\left(0 < x < 1, 0 < y < \frac{1}{2}\right)$

a) Verifique que se trata de uma função densidade.

b) Obtenha as funções densidade marginais de X e Y e analise a independência.

c) $P\left(X < \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{4}\right)$

$d)$ $\mathrm{P}(Y > X)$

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- *Ex.13:* Seja (X, Y) o vector aleatório onde X representa o tempo de permanência na aula e Y o aproveitamento que faz da mesma.

$$f_{X,Y}(x,y) = k \quad (0 < x < 1; 0 < y < 0{,}8x)$$

a) Mostre que $k = 2{,}5$.

b)Qual a probabilidade de o aluno aproveitar mais de 50% do tempo de permanência na aula?

4.5 - Valor esperado de variáveis aleatórias bidimensionais (discretas e contínuas)

Definição 4.13 – Valor esperado de função de v.a. bidimensional

Se $(X\ ,Y)$ *é uma variável aleatória bidimensional discreta com função probabilidade* $f_{X,Y}$ *, e se* ψ *é uma função de* $(X\ ,Y)$*, a expressão*

$$E[\psi(X,Y)] = \sum_{(x,y)\epsilon D_{X,Y}} \psi(x,y)\,.\,f_{XY}(x,y) \quad (4.29\ )$$

ou

$$E[\psi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x,y).\,f_{X,Y}(x,y)dydx \qquad (4.30\ )$$

é o valor esperado de $\psi(X,Y)$.

Nota: *Tal como no caso unidimensional, tem de se verificar a condição de existência do valor esperado.*

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- **Cálculo do valor esperado marginal de X e de Y (v.a.(s) discretas)**

$$E(X) = \sum_{(x,y)\epsilon D_{X,Y}} x.f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x\epsilon D_X} x \sum_{y\epsilon D_Y} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x\epsilon D_X} x.f_X(x)$$

$$E(Y) = \sum_{(x,y)\epsilon D_{X,Y}} y.f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y\epsilon D_Y} y \sum_{x\epsilon D_X} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y\epsilon D_Y} y.f_Y(y)$$

- **Cálculo do valor esperado marginal de X e de Y (v.a.(s) contínuas)**

$$\boldsymbol{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X,Y}(x,y) dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx}$$

$$\boldsymbol{E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{X,Y}(x,y) dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy}$$

CAPÍTULO 3(4)– VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Ex. Um agente imobiliário está interessado na relação entre o número de linhas dos anúncios para venda de apartamentos e o número de potenciais compradores. O número de potenciais compradores e o número de linhas dos anúncios são respectivamente representados pelas v.a.(s) X e Y. Usando registos históricos o agente imobiliário chegou à seguinte f.p. conjunta:

$X \quad \backslash \quad Y$	3	4	5
0	0,09	0,07	0,03
1	0,14	0,23	0,1
2	0,07	0,16	0,11

a) Calcule o número médio de potenciais compradores e respectiva variância. O mesmo para o número médio de linhas dos anúncios.

b) Calcule o $E(XY)$

CAPÍTULO 3(4)– VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- Seja a v.a. Bidimensional (X, Y) com função probabilidade conjunta:

$\boldsymbol{x \setminus y}$	3	5	$f_X(x)$
1	0,1	0,3	0,4
2	0,2	0,4	0,6
$f_Y(y)$	0,3	0,7	1

$$E(XY) = \sum_{(x,y)\epsilon D_{X,Y}} xyf_{X,Y}(xy)$$

$$= 1 \times 3 \times 0{,}1 + 1 \times 5 \times 0{,}3 + 2 \times 3 \times 0{,}2 + 2 \times 5 \times 0{,}4 = 7$$

$$E(X) = \sum_{(x,y)\epsilon D_{X,Y}} xf_{X,Y}(xy) = \sum_{x\epsilon D_X} xf_X(x) = 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}6 = 1{,}6$$

$$E(Y) = \sum_{(x,y)\epsilon D_{X,Y}} yf_{X,Y}(xy) = \sum_{y\epsilon D_Y} yf_Y(y) = 3 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}7 = 4{,}4$$

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Ex: Uma empresa de recrutamento de trabalho temporário aplica 2 testes que avaliam as competências em matemática e destreza manual aos trabalhadores que a ela recorrem para arranjar emprego.

Da análise da informação sobre as notas de centenas de candidatos nos testes de avaliação de competências em matemática e destreza manual, a empresa concluiu que aquelas notas são bem representadas, respectivamente, pelas v.a.(s) X e Y com função densidade de probabilidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = 0.4(2x + 3y) \qquad (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1)$$

a) Qual a nota média e a variância dos candidatos em matemática? E em destreza manual?

b) Calcule o $E(XY)$.

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- Seja a v.a. Bidimensional (X, Y) com função densidade conjunta:

$$f(x,y) = \frac{12}{7}(x^2 - xy) \quad 0 < x < 1; 0 < y < 1$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy\frac{12}{7}(x^2 - xy)\mathrm{dxdy}$$

$$E(X) = \int_0^1 \int_0^1 x\frac{12}{7}(x^2 - xy)\mathrm{dydx} = \int_0^1 x\int_0^1 \frac{12}{7}(x^2 - xy)dydx = \int_0^1 xf_X(x)dx$$

$$E(Y) = \int_0^1 \int_0^1 y\frac{12}{7}(x^2 - xy)\mathrm{dxdy} = \int_0^1 y\int_0^1 \frac{12}{7}(x^2 - xy)dxdy = \int_0^1 yf_Y(y)dx$$

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- Seja (X, Y) v.a. com f.probabilidade conjunta:

$$f(x, y) = \frac{x + y}{32} \qquad (x = 1,2; y = 1,2,3,4)$$

Calcular $E(X, Y), E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$

$\boldsymbol{X} \quad \backslash \quad \boldsymbol{Y}$	1	2	3	4	$\boldsymbol{f_X(x)}$
1	$2/32$	$3/32$	$4/32$	$5/32$	$14/32$
2	$3/32$	$4/32$	$5/32$	$6/32$	$18/32$
$\boldsymbol{f_Y(y)}$	$5/32$	$7/32$	$9/32$	$11/32$	1

CAPÍTULO 3(4)– VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- Seja (X, Y) v.a. com função densidade conjunta:

$$f(x, y) = 8xy \qquad (0 < x < 1; 0 < y < x)$$

Calcular $E(X, Y)$, $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Teorema 4.4 e sua generalização ao caso contínuo

Se (X, Y) *for uma variável* aleatória bidimensional e se existirem $E(X)$ *e* $E(Y)$, *então,* $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Teorema 4.5 e sua generalização ao caso contínuo

Se X *e* Y *forem variáveis* aleatórias **independentes** e se existirem $E(X)$ *e* $E(Y)$, *então,* $E(XY) = E(X)\,E(Y)$.

Atenção: <u>A recíproca não é verdadeira</u>, ié, $E(XY) = E(X)\,E(Y)$ **não garante que as variáveis sejam independentes.**

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Momentos em relação à origem

Definição 4.14 – Momentos de ordem $r + s$ *em relação à origem*
Seja (X, Y) *uma variável aleatória bidimensional discreta. O valor esperado,* $\mu'_{rs} = E(X^r Y^s)$ define, se existir, um momento de ordem $r + s$ *em relação à origem (ordinário) da variável* aleatória (X, Y).

Momentos de ordem $r + s$ *em relação à origem :*

v.a. Discretas

$$\mu'_{rs} = E(X^r Y^s) = \sum_{(x,y)\epsilon D_{X,Y}} x^r y^s f_{X,Y}(x, y) \quad (4.31)$$

v.a. Contínuas

$$\mu'_{rs} = E(X^r Y^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r y^s f_{X,Y}(x, y) dxdy \quad (4.32)$$

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Momentos em relação à média

Definição 4.15 – Momentos de ordem $r + s$ em relação à média
Seja (X, Y) *uma variável aleatória bidimensional. O valor esperado,*

$$\mu_{rs} = E[(X - \mu_X)^r (Y - \mu_Y)^s]$$

define, se existir, um momento de ordem $\mathrm{r} + s$ *em relação à média (ou central) da variável* aleatória $(X\ ,Y)$.

V.a.(s) Discretas

$$\mu_{rs} = E[(X - \mu_X)^r (Y - \mu_Y)^s] = \sum_{(x,y) \epsilon D_{XY}} (x - \mu_X)^r (y - \mu_Y)^s f_{XY}(x, y) \quad (4.35)$$

V.a.(s) Contínuas

$$\mu_{rs} = E[(X - \mu_X)^r (Y - \mu_Y)^s] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^r (y - \mu_Y)^s f_{XY}(x, y) dx dy$$

(4.36)

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

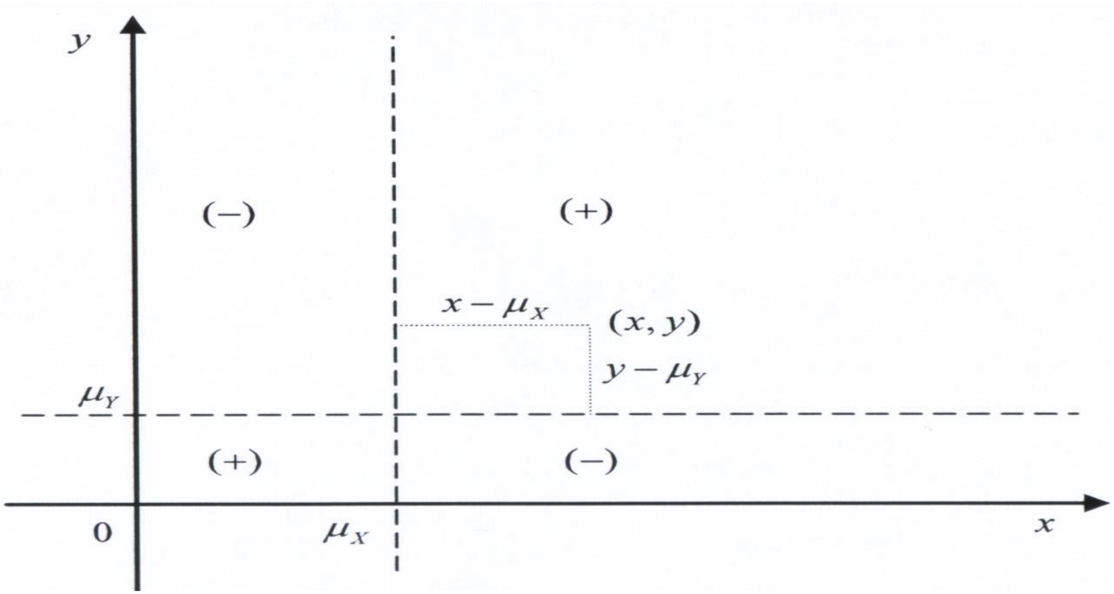
Covariância

Definição 4.16 – Covariância
A covariância das variáveis aleatórias X *e* Y *é,*

$$\mu_{11} = Cov(X,Y) = \sigma_{X,Y} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)],$$

se este valor esperado existir.

$Cov(X\,,Y) \;=\; E(XY) \;-\; E(X\,)\,E(Y)$ *Resultado importante*



CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Coeficiente de correlação

Definição 4.17 – Coeficiente de correlação
O coeficiente de correlação entre as variáveis aleatórias X *e* Y *é dado por,*

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}.\sqrt{Var(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X).E(Y)}{\sqrt{\sigma_X^2}.\sqrt{\sigma_Y^2}}$$

$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ se e só se existir uma relação linear.

Teorema 4.6 – Se duas variáveis aleatórias, X e Y, são *independentes então a respectiva* covariância é igual a zero.

A recíproca não é verdadeira, isto é, covariância nula não implica independência.

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Teorema 4.7 – Se existem segundos momentos para as variáveis aleatórias $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$, então

$$Var(X \mp Y) = Var(X) + Var(Y) \mp 2Cov(X,Y)$$

Em particular, se as variáveis são independentes,

$$Var(X \mp Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Exemplo 4.7 – Considerem-se as variáveis aleatórias X *e* Y *com funções probabilidade* conjuntas – casos **A e B**

Em ambos os casos, $E(X) = E(Y) = 3; Var(X) = Var(Y) = 4$

A

$X \setminus Y$	**1**	**5**	$f_X(x)$
1	0.4	0.1	0.5
5	0.1	0.4	0.5
$f_Y(y)$	0.5	0.5	1

B

$X \setminus Y$	**1**	**5**	$f_X(x)$
1	0.1	0.4	0.5
5	0.4	0.1	0.5
$f_Y(y)$	0.5	0.5	1

A – $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y) = 11.4 - 9 = 2.4$

B - $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y) = 6.6 - 9 = -2.4$

Exemplo 4.8 – Considerem-se as variáveis aleatórias, X e Y, *com função probabilidade* conjunta

$X \quad \backslash \quad Y$	**-1**	**0**	**1**	$f_X(x)$
-1	0	0.25	0	0.25
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.25	0	0.25
$f_Y(y)$	0.25	0.5	0.25	1

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y) = 0.$$

As v.a.(s) X e Y não são independentes.

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Definição 4.18 – Valor esperado condicionado

Seja a variável aleatória $\mathrm{Z} = \psi(X, Y)$, *função das variáveis aleatórias* X *e* Y. O valor esperado de Z *condicionado por* $X = x$, *é definido por:*

$$E(Z|X = x) = E(\psi(X, Y)|X = x)$$

verificando-se a condição habitual de existência do valor esperado.

V.a.(s) Discretas

$$E(Z|Y = y) = E(\psi(X, Y)|Y = y) = \sum_{x \epsilon D_X} \psi(X, Y).\, f_{X|Y=y}(x) \tag{4.44}$$

V.a.(s) Contínuas

$$E(Z|Y = y) = E[\psi(X, Y)|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(X, Y) f_{X|Y=y}(x) dx \tag{4.45}$$

Definição 4.18 – Valor esperado condicionado

Seja a variável aleatória $Z = \psi(X, Y)$, *função das variáveis aleatórias* X *e* Y. O valor esperado de Z *condicionado por* $X = x$, *é definido por:*

$$E(Z|X = x) = E(\psi(X, Y)|X = x)$$

verificando-se a condição habitual de existência do valor esperado.

V.a.(s) Discretas

$$E(Z|X = x) = E(\psi(X, Y)|X = x) = \sum_{y \epsilon D_Y} \psi(X, Y).\, f_{Y|X=x}(y) \quad (4.44)$$

V.a.(s) Contínuas

$$E(Z|X = x) = E[\psi(X, Y)|X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(X, Y) f_{Y|X=x}(y)dy \quad (4.45)$$

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

V.a.(s) Discretas

$$E(Z|Y=y)=E(\psi(X,Y)|Y=y)=\sum_{x\epsilon D_X}\psi(X,Y).f_{Y|Y=y}(x) \quad (4.46)$$

V.a.(s) Contínuas

$$E(Z|Y=y)=E[\psi(X,Y)|Y=y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(X,Y)f_{X|Y=y}(x)dx \quad (4.47)$$

Nota: $E(Z|X=x)$ e $E(Z|Y=y)$ são v.a.(s)

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- Seja (X, Y) v.a. bidimensional com função probabilidade conjunta :

$x \setminus y$	3	5	$f_X(x)$
1	0,1	0,3	0,4
2	0,2	0,4	0,6
$f_Y(y)$	0,3	0,7	1

$$E(Y|X=1) = \sum_{y \epsilon D_Y} y f_{Y|X=1}(y) = \sum_{y \epsilon D_Y} y \frac{f(1,y)}{f_X(1)} = 3\frac{f(1{,}3)}{f_X(1)} + 5\frac{f(1{,}5)}{f_X(1)} = 4{,}5$$

$$E(Y|X=2) = \sum_{y \epsilon D_Y} y f_{Y|X=2}(y) = \sum_{y \epsilon D_Y} y \frac{f(2,y)}{f_X(2)} = 3\frac{f(2{,}3)}{f_X(2)} + 5\frac{f(2{,}5)}{f_X(2)} = 4{,}3(3)$$

Atenção: tem-se um valor para cada $E(Y|X = x), x \in D_X$ e esses valores só são iguais se as variáveis forem independentes.

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Casos particulares mais interessantes:

- **Médias condicionadas para v.a.(s) discretas**

$$\psi(X,Y) = Y \Rightarrow E(Y|X=x) = \sum_{y \in D_Y} y.\, f_{Y|X=x}(y)$$

$$\psi(X,Y) = X \Rightarrow E(X|Y=y) = \sum_{x \in D_X} x.\, f_{X|Y=y}(x)$$

- **Médias condicionadas para v.a.(s) contínuas**

$$\psi(X,Y) = Y \Rightarrow E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y.\, f_{Y|X=x}(y)dy$$

$$\psi(X,Y) = Y \Rightarrow E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y.\, f_{Y|X=x}(y)dy$$

Nota: $E(X|Y)$ e $E(Y|X)$ são v.a.(s)

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Ex.57 Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional com função densidade:

X – quantidade matéria prima recebida

Y - quantidade matéria prima consumida

$$f(x,y) = 15xy^2 \qquad (0 < y < x; 0 < x < 1)$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 15xy^2 dx = 15y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_y^1 = \frac{15}{2}(y^2 - y^4)\ (0 < y < 1)$$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{15xy^2}{\frac{15}{2}(y^2 - y^4)} = \frac{2x}{(1 - y^2)} \qquad (0 < x < 1)$$

$$E(X|Y = y) = \int_0^1 x \frac{2x}{(1 - y^2)} dx = \frac{2}{3(1 - y^2)} \qquad (0 < y < 1)$$

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Ex 57 (continuação)

$$f_X(x) = \int_0^x 15xy^2 dy = 15x \int_0^x y^2 dy = 5x^4 \qquad (0 < x < 1)$$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{15xy^2}{5x^4} = 3\,\frac{y^2}{x^3} \qquad (0 < y < 1)$$

$$E(Y|X = x) = \int_0^x y\,3\,\frac{y^2}{x^3} dy = \frac{3}{x^3}\int_0^x y^3 dy$$

$$= \frac{3}{x^3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^x = \frac{3x^4}{4x^3} = \frac{3x}{4} (0 < x < 1)$$

$$E(Y|X = 0.75) = \frac{3 \times 0.75}{4} = 0.5625$$ Interpretação

Atenção: No cálculo de valores esperados condicionados, em domínios triangulares, os limites de integração são os definidos por esse domínio.

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Definição 4.20: Independência em média

Se $E(Y|X = x) = \mathrm{E}(Y)\ \ \forall\, x\ (4.62)$

ou

$$E(X|Y = y) = E(X)\ \ \forall y\ (4.63)$$

As v.a.(s) X e Y dizem-se independentes em média

Notas:

1. Independência em média não é simétrica. $4.62 \Rightarrow 4.63$ e vice-versa

2. Independência em média implica a não correlação mas a recíproca não é verdadeira

- **Valor esperado iterado**

Teorema 4.8 – O valor esperado de $Z = \psi(X, Y)$***, se existir, é igual ao valor esperado*** do seu valor esperado condicionado por X,

$$E(Z) = E[E(Z|X)]$$

Em particular quando $Z = Y$ tem-se $E(Y) = E_X[E_Y(Y|X)]$ (4.53)

que se designa por **Regra do Valor Esperado Iterado**

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- **Ex.57 (continuação)**

$$E(Y|X=x) = \int_0^1 y\, 3\frac{y^2}{x^3} dy = \frac{3}{x^3}\int_0^1 y^3 dy = \frac{3}{x^3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^x =$$

$$= \frac{3x^4}{4x^3} = \frac{3x}{4} \quad (0 < x < 1)$$

$$f_X(x) = \int_0^x 15xy^2 dy = 15x\int_0^x y^2 dy = 5x^4 \qquad (0 < x < 1)$$

$$E_X[E_Y(Y|X=x)] = E_X\left(\frac{3x}{4}\right) = \int_0^1 \frac{3x}{4}.5x^4 dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{15x^4}{4} dx = \left[\frac{15x^6}{24}\right]_0^1 = \frac{5}{8}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y.f_Y(y) = \int_0^1 y.\frac{15}{2}(y^2 - y^4)dy = \frac{15}{2}\left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6}\right]_0^1 = \frac{5}{8}$$

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

- Seja (X, Y) v.a. bidimensional com função probabilidade conjunta

$\boldsymbol{x} \quad \backslash \quad \boldsymbol{y}$	3	5	$f_X(x)$
1	0,1	0,3	0,4
2	0,2	0,4	0,6
$f_Y(y)$	0,3	0,7	1

$$E(Y|X=1) = 3 * \frac{0{,}1}{0{,}4} + 5 * \frac{0{,}3}{0{,}4} = 4{,}5;$$

$$E(Y|X=2) = 3 * \frac{0{,}2}{0{,}6} + 5 * \frac{0{,}4}{0{,}6} = 4{,}3(3)$$

$$E(Y) = E_X\left[\underbrace{E_Y(Y|X)}_{\psi(Y)}\right] = E(Y|X=1).f_X(1) + E(Y|X=2).f_X(2)$$

$$= 4{,}5 \times 0{,}4 + 4{,}3(3) \times 0{,}6 = 4{,}4$$

$$E(Y) = 3 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}7 = 4{,}4$$

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Definição 4.19 – Variância condicionada

A variância de Y *condicionada por* $X = x$, *é definido por:*

$$Var(Y|X = x) = E\{[Y - E(Y|X = x)]^2|X = x\}$$

- **Variâncias condicionadas para v.a.(s) discretas**

$$Var(Y|X = x) = \sum_{y \in D_Y}[y - E(Y|X = x)]^2 . f_{Y|X=x}(y) \quad (4.54)$$

- **Variâncias condicionadas para v.a.(s) contínuas**

$$Var(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty}[y - E(Y|X = x)]^2 . f_{Y|X=x}(y)dy \quad (4.55)$$

CAPÍTULO 3(4) – VALORES ESPERADOS E PARÂMETROS

Definição 4.19 – Variância condicionada

A variância de X *condicionada por* $Y = y$*, é definido por:*

$$Var(X|Y = y) = E\{[X - E(X|Y = y)]^2|Y = y\}$$

- **Variâncias condicionadas para v.a.(s) discretas**

$$Var(X|Y = y) = \sum_{x \in D_X}[x - E(X|Y = y)]^2 . f_{X|Y=y}(x) \quad (4.56)$$

- **Variâncias condicionadas para v.a.(s) contínuas**

$$Var(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty}[x - E(X|Y = y)]^2 . f_{X|Y=y}(x)dx \quad (4.55)$$